

## 感染症の数理を学ぶ：1 ページに要約（→ 前回の「上」から）

1. まず、ある時点の感染者（＝「現在、感染中の人」）の数は、「入」と「出」で決まりますから、次のとおりに書くことができます。

$$\text{感染者数} = \text{新規の感染者数} - \text{回復するか死亡するかで感染者から除外される人の数}$$

2. このうち、新規の感染者数については、疫学の基礎的な数理モデル（SIR モデル）に従うと、次の4つの「掛け算」で決まります。

$$\begin{aligned} & \text{新規の感染者数} \\ &= (1 - \text{行動制限率}) \times \text{基本再生産数} \times \text{免疫を持っていない人の割合} \times \text{感染者数} \\ &= (1 - \text{行動制限率}) \times \text{行動制限前の実効再生産数} \times \text{感染者数} \\ &= \text{行動制限後の実効再生産数} \times \text{感染者数} \end{aligned}$$

「再生産数」は、最近、新聞やテレビ、インターネット・メディアによく出てきます。再生産数は、「感染者1人あたりが、感染から回復（もしくは死亡）までの期間において、平均して、何人に感染させるか」を見るもので、いわば、感染力です。「基本再生産数」は、細菌やウイルスが本来備える再生産数で、「理想的な状態」での感染力です。感染症が人に問題を引き起こしているわけですから、新型コロナウイルスの基本再生産数は1を上回ると考えられます（→例えば、Liu et al (2020) は、12の異なる推計結果から、レンジ：1.4-6.49、平均：3.29、中位：2.79と、まとめています）。「実効再生産数」は、各時点で観察される、実際の再生産数です。考察される主な点は、次のとおりです。

1. 実効再生産数が1を下回るような行動制限を行えば、感染者数は減少に転じる。
2. しかし、行動制限を解除すれば、「免疫を持っていない人の割合」が依然高い\*ために、感染は再拡大する。（\*行動制限は、論理的に、そのようなときに実施される。）
3. すなわち、行動制限を行わずに感染者数が減少するには、感染が拡大するほかない。ただし、感染の「経験」は、ワクチンの接種によっても可能である。
4. つまり、感染の拡大を抑制するためには、（治療薬や）ワクチンが開発されるまで、程度の差こそあれ、行動制限を続けるほかない。
5. 地域による感染推移の相違の要因としては、検査数（不顕性感染が多い場合）や人口、（上記の掛け算より）A. 基本再生産数それ自体（ウイルスの遺伝子）、B. 流行前の免疫率（自然免疫と他のワクチンを含む獲得免疫）、C1. 流行前の行動制限（うがい・手洗い・マスク・行動範囲などの習慣）、C2. 流行後の行動制限が挙げられる。

## 目次

|      |  |    |
|------|--|----|
| 13   | 理論疫学の基礎的な数理モデル：SIR モデル                               | 3  |
| 13.1 | 主な定義と仮定 . . . . .                                    | 3  |
| 13.2 | SIR モデル . . . . .                                    | 4  |
| 13.3 | 基本再生産数 $R_0$ . . . . .                               | 5  |
| 14   | より一般化された「人口比バージョン」の SIR モデル                          | 5  |
| 15   | シミュレーションの結果について、本稿で確認したいこと                           | 6  |
| 16   | シミュレーションの結果をひとつずつ確認する。                               | 7  |
| 16.1 | 先に、システムの「平衡点」を考えておく . . . . .                        | 7  |
| 16.2 | 初期時点の $x$ と $y$ . . . . .                            | 8  |
| 16.3 | 感染が拡大するための初期条件 . . . . .                             | 9  |
| 16.4 | $x$ と $y$ の挙動 . . . . .                              | 10 |
| 16.5 | $x$ と $y$ の停止 . . . . .                              | 11 |
| 16.6 | $y$ が先か、 $x$ が先か? . . . . .                          | 11 |
| 16.7 | 基本再生産数や初期の感受性人口比率が小さいと、感染しないままの人が<br>割と残る。 . . . . . | 13 |
| 16.8 | 感染者数 $x$ の最大値 . . . . .                              | 15 |

## 13 理論疫学の基礎的な数理モデル：SIR モデル

### 13.1 主な定義と仮定

細菌やウイルスの感染プロセスを考えると、

1. 免疫を持っていない人が、
2. 感染者と接して、新たな感染者となり、
3. 免疫を獲得して、回復します（あるいは、死亡します）。

すなわち、3者に分かれていますが、それぞれ、次のように呼ばれます。

1. 感受性者もしくは感受性人口 (Susceptibles)：免疫を持っていない人（たち）
2. 感染者 (Infected)：現在、感染中の人（たち）
3. 除外者 (Removed)\*<sup>1</sup>：免疫を持って回復したか、死亡したかのいずれかによって、もはや感染させられることも、させることもない人（たち）

SIR モデルは、これら3者、すなわち、感受性者 (Susceptibles)、感染者 (Infected)、除外者もしくは回復者 (Removed/Recovered) の、3つの頭文字を取ったものです。

感受性者を  $S$ 、感染者を  $I$ 、除外者を  $R$  と、それぞれおき、

$$S(t) \geq 0, I(t) \geq 0, R(t) \geq 0 \text{ for } 0 \leq t < \infty \quad (1)$$

とします。例えば、 $S(t)$  は、時点  $t$  における感受性者の数 (= 感受性人口) です。

また、総人口を  $N$  とおき、これを一定とします。

さらに、任意の時点  $t$  で、総人口  $N$  は、感受性者  $S$ 、感染者  $I$ 、除外者  $R$  のいずれかに分けられると仮定します。すなわち、

$$N = S(t) + I(t) + R(t) \quad (2)$$

です。

---

\*<sup>1</sup> もしくは、回復者 (Recovered) と呼ばれる。

## 13.2 SIR モデル

SIR モデルでは、 $S$ ：感受性者、 $I$ ：感染者、 $R$ ：除外者は、時点  $t$  において、それぞれ、次のような挙動を持ちます。

$$\frac{dS(t)}{dt} = -\beta \frac{S(t)}{N} I(t) \quad (3)$$

$$\frac{dI(t)}{dt} = \beta \frac{S(t)}{N} I(t) - \gamma I(t) \quad (4)$$

$$\frac{dR(t)}{dt} = \gamma I(t) \quad (5)$$

ここで、 $\beta > 0$  は（単位時間あたりの、あるいは瞬間的な）感染率、 $\gamma > 0$  は（同じく）回復率です。合わせて、例えば、 $dS(t)$  は、時点  $t$  から、極めて短い時間  $dt$  が経過するときの、 $S$  の変化幅（difference）を見ています。

$$dS(t) = S(t + dt) - S(t) \quad (6)$$

式 (3)(4)(5) をすべて足すと、0 であることが確かめられます。

$$\frac{dS(t)}{dt} + \frac{dI(t)}{dt} + \frac{dR(t)}{dt} = 0 \quad (7)$$

$$dS(t) + dI(t) + dR(t) = 0 \quad (8)$$

これは、「総人口  $N$  を一定」と仮定しており、出生や死亡による「出入り」がないためです。言い換えれば、何かが増えるときには、他の何かが減ります（→ 例えば、新たな感染者（除外者）は、感受性者（感染者）からしか「引っ張って」くることができません）。同じ結果は、式 (2) を、時間  $t$  で微分しても得られます。

合わせて、式 (4)(5) を見ると、感染者  $I$  のうち  $\gamma$  の割合が、除外者  $R$  に振り替わりますから、「免疫の獲得（もしくは死亡）」が考えられています。

また、式 (5)(3) を見ると、除外者  $R$  から、感受者  $S$  への振り替わりがありませんので、一度、獲得した免疫は、生涯、失われない（＝終生免疫）が考えられています\*2。

つまり、

$$\text{感受性者} \rightarrow \text{感染者} \rightarrow \text{除外者} \quad (9)$$

\*2 あるいは、季節性インフルエンザなどの場合における「流行シーズン 1 回」（＝免疫が失われるまで）を、考察の対象と考えることもできます。

という、外からの出入りがなく、なおかつ、一方向の（不可逆な）プロセスが検討されています。

### 13.3 基本再生産数 $R_0$

基本再生産数  $R_0$  は、「人口集団が完全に感受性である場合に、1人の感染者が、感染力を失うまでに（＝感染から回復までの間に、あるいは、感染者から除外者に振り替わるまでに）、平均して何人に感染させるか」を見るものです。よって、

$$R_0 = \frac{\beta}{\gamma} \quad (10)$$

です\*3。すなわち、式 (10) は、「単位時間あたりの感染力 × 感染期間」を示しています。

## 14 より一般化された「人口比バージョン」の SIR モデル

式 (3)(4)(5) は、人口の数そのものを扱っていますが、以下、記述をわかりやすくするために（あるいは、一般化するために）、式 (3)(4)(5) の辺々を、総人口  $N$  で割って、総人口比で考えます。

感受性人口比率を  $x(t) = S(t)/N$ 、感染者比率を  $y(t) = I(t)/N$ 、除外者比率を  $z(t) = R(t)/N$  と、それぞれおくと、式 (3)(4)(5) は、

$$\frac{dx(t)}{dt} = -\beta x(t)y(t) \quad (11)$$

$$\frac{dy(t)}{dt} = \beta x(t)y(t) - \gamma y(t) \quad (12)$$

$$\frac{dz(t)}{dt} = \gamma y(t) \quad (13)$$

と書き換えられます。引き続き、 $\beta$  は（単位時間あたりの、あるいは瞬間的な）感染率、 $\gamma$  は（同じく）回復率です。

また、任意時点  $t$  で、

$$x(t) + y(t) + z(t) = 1 \quad (14)$$

---

\*3 例えば、Hethcote (2000) を参照。

であり、

$$0 \leq x(t) \leq 1, 0 \leq y(t) \leq 1, 0 \leq z(t) \leq 1 \text{ for } 0 \leq t < \infty \quad (15)$$

です。

(以下、記述をスムーズにするために、感受性人口比率  $x(t) = S(t)/N$  を単に「感受性者・感受性人口」、感染者比率  $y(t) = I(t)/N$  を単に「感染者」、除外者比率  $z(t) = R(t)/N$  を単に「除外者」と、それぞれ呼ぶことがあります。)

## 15 シミュレーションの結果について、本稿で確認したいこと

SIR モデルでシミュレーションすると、例えば、次のことが確認されます。

- 軌道：感受性人口（＝免疫を持っていない人、 $S, x$ ）は、時を経て、減少する。
- 軌道：感染者（＝現在感染中の人、 $I, y$ ）は、当初は増加し、やがて減少に転じる。
- 軌道：除外者（＝免疫獲得者および死亡者、 $R, z$ ）は、増加する。  
→ 導関数の符号と境界値。
  
- 終着点：基本再生産数が大きければ（＝感染力が強いと）、多くの人が感染を経験する。逆に、基本再生産数が小さいと、感染しないままの人  $S, x$  が、割と残る。
- 終着点：当初の感受性人口比率が高ければ（＝免疫を持っていない人が多ければ）、より多くの人が感染を経験する。逆に、当初に免疫を持っている人が多いと、感染しないままの人  $S, x$  が、割と残る。→ 集団免疫の効果。
- 終着点：感染者  $I, y$  は、基本再生産数や当初の感受性人口比率の多寡に関わらず、ゼロ付近まで減少する。  
→ 収束値。
  
- ピーク：基本再生産数が大きければ（＝感染力が強いと）、感染者  $I, y$  のピーク水準が高い。
- ピーク：当初の感受性人口比率が高ければ（＝当初に免疫を持っている人が少なければ）、感染者  $I, y$  のピーク水準が高い。  
→ 導関数の符号。

## 16 シミュレーションの結果をひとつずつ確認する。

### 16.1 先に、システムの「平衡点」を考えておく

感染拡大のプロセス\*4を考えると、

1. まず、感染症が発生する「前」の状態を考えると、そこは（当然ながら）、とある細菌やウイルスの感染者が一切存在しない、「平静」な状態です。
2. 次に、感染者の発出によって、感染者が増加します。
3. やがて、感染者の増加によって、感受性者が減少し、なおかつ、免疫獲得者が増加して（ワクチン接種を含む）、感染者は減少に転じます。
4. そして、時間がさらに（さらに）進んで、同じプロセスが続くと、感染者がさらに（さらに）減って、感染者がほぼ（ほぼ）存在しない状態に向かうと予想されます。

これを「ボール転がし」でイメージすれば、

1. 当初は、運動が停止しています。→ 均衡しています。
2. 次に、作用があつて、運動が始まり、当初は加速します。
3. やがて、運動が弱くなります。
4. 最後に、運動が再び停止します。→ 均衡しています。

SIR モデルのシステムで考えると、そのような「均衡」においては、感受性人口比率  $x(t) = S(t)/N$ 、感染者比率  $y(t) = I(t)/N$ 、除外者比率  $z(t) = R(t)/N$  は、いずれも運動が停止していますから、式 (11)(12)(13) より、

$$\frac{dx(t)}{dt} = -\beta xy = 0 \quad (16)$$

$$\frac{dy(t)}{dt} = (\beta x - \gamma)y = 0 \quad (17)$$

$$\frac{dz(t)}{dt} = \gamma y = 0 \quad (18)$$

であり、これを満たすのは、

$$y = 0 \quad (19)$$

です。

---

\*4 ただし、終生免疫の獲得があり、免疫を持たない新世代はワクチン接種を行う場合です。

$y = 0$  となる  $(x, y, z)$  の組み合わせは、このシステムの「平衡点」であり、そうした状態では、システムは均衡して、 $x, y, z$  のいずれも動きません。

言い換えれば、

1. 感染者  $y$  の存在こそが、このシステムを動かし、
2. 感染者  $y$  が存在する限り、システムは動きを続け、
3. 感染者  $y$  が存在なくなると。このシステムは止まります。

## 16.2 初期時点の $x$ と $y$

(このシステムは、式 (14) より、感受性人口比率  $x(t)$  と、感染者比率  $y(t)$  が決まれば、除外者比率  $z(t)$  も決まります。したがって、 $x$  および  $y$  について検討すれば十分です。)

まず、細菌やウイルスが侵入する「前」の人口集団  $N$  の様子を考えると、彼らは「何も起きていない」均衡にいます。そうした「事前」の時点をも、 $t = 0$  とします。

すると、時点  $t = 0$  の均衡は、とある細菌やウイルスの感染者がシステムには存在しない状態ですから ( $y = 0$ )、

$$(x(0), y(0), z(0)) = (x(0), 0, z(0)) \quad (20)$$

です。(当然ながら) こうした状況においては、感染は一切発生せず、よって拡大もしません。 $t = 0$  はシステムが動きを持たない「平衡点」のひとつです。

例えば、新種の細菌やウイルスの「発生前」を考えると、免疫を持っている人  $z$  も感染者  $y$  も存在しないため、

$$(x(0), y(0), z(0)) = (1, 0, 0) \quad (21)$$

と書けます。

このシステムに、何かの拍子で、とある細菌やウイルスが侵入すると、均衡が崩れて、システムは運動を始めます (→ 感染が拡大をし始めますし、時計の針も回り始めます)。そこでは、システムが動いているため、感染者  $y$  が存在します。すなわち、

$$y(t) > 0; t > 0 \quad (22)$$

です。



逆に、時間  $t$  をさかのぼって、感染者が発生する「前」の時点  $t = 0$  に限りなく近くなると、 $y(t)$  はゼロに収束します。すなわち、

$$\lim_{t \rightarrow 0} y(t) = 0 \quad (23)$$

です。

細菌やウイルスの発生状況を考えると、発生当初 ( $t > 0$ ) の感染者  $I$  は、究極的には 1 人であり、大きな人口集団  $N$  を考えると、発生当初の感染者 1 人が人口集団に占める割合  $y = I/N$  は、かなり小さい（ゼロに近い）と考えられます。また、その直前 ( $t = 0$ ) では、感染者は存在しませんから、 $I(0) = y(0) = 0$  です。

最後に、感染が「発生」するためには ( $\rightarrow$ 「拡大」ではない)、初期時点で、感受性者が必要ですから、

$$x(0) > 0 \quad (24)$$

でなければなりません。

### 16.3 感染が拡大するための初期条件

感染者  $y(t)$  は、式 (12) より、

$$\frac{dy(t)}{dt} = \beta x(t)y(t) - \gamma y(t) \quad (12)$$

$$= (\beta x(t) - \gamma)y(t) \quad (25)$$

と書き換えられます。

したがって、このシステムに、何かの拍子で、とある細菌やウイルスが侵入したときに ( $t > 0, t \rightarrow 0$ )、感染が拡大するための初期条件は、

$$\frac{dy(t)}{dt} = (\beta x(0) - \gamma)y(t) > 0 \quad (26)$$

ですから、(21) より、

$$\beta x(0) - \gamma > 0 \quad (27)$$

$$\beta x(0) > \gamma \quad (28)$$

$$x(0) > \frac{\gamma}{\beta} \quad (29)$$

です。

本稿では、感染拡大のプロセスを学ぶことが主題のため、

$$x(0) > \frac{\gamma}{\beta} \quad (30)$$

とします。

## 16.4 $x$ と $y$ の挙動

（このシステムは、式 (14) より、感受性人口比率  $x(t)$  と、感染者比率  $y(t)$  が決まれば、除外者比率  $z(t)$  も決まります。したがって、 $x$  および  $y$  について検討すれば十分です。）

まず、感受性人口  $x(t)$  は、式 (11) から

$$\frac{dx(t)}{dt} = -\beta x(t)y(t) \quad (11)$$

であり、感染率  $\beta > 0$  かつ、(15)(22)(24) より、 $dx(t)/dt < 0$  であるため、感受性人口  $x(t)$  は、 $t$  に関して、単調に減少します。

次に、感染者  $y(t)$  は、式 (12) より、再び、

$$\frac{dy(t)}{dt} = \beta x(t)y(t) - \gamma y(t) \quad (12)$$

$$= (\beta x(t) - \gamma)y(t) \quad (25)$$

と書き換えられます。

よって、(22) より、感染者  $y(t)$  は、 $t$  に関して、（時間の経過と共に、 $x(t)$  が (30) で定めたとおり、 $x(0) > \gamma/\beta$  から、減少するプロセスに沿って、順番に記述すると）

1.  $x(t) > \gamma/\beta$  なる  $t$  までは、 $dy(t)/dt > 0$  であるため、単調に増加、その後、
2.  $x(t) = \gamma/\beta$  なる  $t$  では、 $dy(t)/dt = 0$  であるため、停止して、最大値を取り、そこから、
3.  $x(t) < \gamma/\beta$  なる  $t$  以降は、 $dy(t)/dt < 0$  であるため、単調に減少

します。

まとめると、 $x(t)$  は単調に減少を続け、 $y(t)$  は増加した後に、停止して減少に転じ、そのまま減少を続けます。

## 16.5 $x$ と $y$ の停止

$x(t)$  も  $y(t)$  も、とある細菌やウイルスが侵入すると、均衡が崩れて、運動を始めます。そして、いったん始まった運動は、再び均衡を取り戻すまで、続きます。

システムが再び、均衡を取り戻すのは、先ほど、(15)-(18) で見たように  $y = 0$  となる時点であり、言い換えれば、時間の経過と共に、とある細菌やウイルスの感染者  $y(t)$  がさらに（さらに）減少を続けて、やがて、存在しなくなる状態です。

運動が止まる時点を  $t = t^*$  とすると、

$$(x(t^*), y(t^*), z(t^*)) = (x(t^*), 0, z(t^*)) \quad (31)$$

です。

言い換えれば、そうした時点  $t = t^*$  は、このシステムのもうひとつの「平衡点」であり、我々の考察が終わる点です。

我々が感染症に興味を失うのは、感染者の数が「目立たなくなる」ときであり、「有限の将来」と考えられます。しかしながら、それでもシステムは、 $y = 0$  となるまで動きを続けていきます。やがて（上で見たようなメカニズムが続くことで）システムに感染者が存在しなくなるのは「観測ができないような将来」と考えられます。

時間  $t$  が先へ（先へと）進むと、感染者  $y(t)$  は、さらに減少を続け、やがて、ゼロに収束します。すなわち、

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = 0 \quad (32)$$

です。

まとめると、このシステムは、 $y = 0$  なる、初期時点  $t = 0$  と、極限  $t \rightarrow \infty$  で均衡します。

## 16.6 $y$ が先か、 $x$ が先か？

次に、関心があるのは、時間の経過と共に、感染者  $y$  がゼロに収束するときに、感受性人口  $x$  はどうなっているかです。言い換えれば、ともに減少を続ける感染者  $y$  と感受性人口  $x$  は、どちらが先にゼロになるかです。

仮に、感染者  $y$  がゼロになってシステムが停止する「前」に、感受性人口  $x$  が（先に）ゼロになるなら、感染者  $y$  がゼロになる背景は、感受性人口  $x$  がゼロになる（駆逐され

る) ためです。

反対にもし、感染者  $y$  がゼロになってシステムが停止する時点で、感受性人口  $x$  がゼロになっていなければ (= 感受性人口  $x$  がゼロにならずに停止すれば)、感染者  $y$  がゼロになる背景は、感染者  $y$  自身が減少することによるものと考えられます。

もう一度、式 (11)(12)(13) を確認します。

$$\frac{dx(t)}{dt} = -\beta x(t)y(t) \quad (11)$$

$$\frac{dy(t)}{dt} = \beta x(t)y(t) - \gamma y(t) \quad (12)$$

$$\frac{dz(t)}{dt} = \gamma y(t) \quad (13)$$

式 (12) を (11) で辺々割ると

$$\frac{dy(t)}{dx(t)} = -1 + \frac{\gamma}{\beta} \frac{1}{x(t)} \quad (33)$$

$$= -1 + R_0^{-1} \frac{1}{x(t)} \quad (34)$$

です。

式 (34) は、次のように積分されます。

$$\frac{y(t) - y(0)}{x(t) - x(0)} = -1 + R_0^{-1} \frac{1}{x(t)} \quad (35)$$

$$y(t) - y(0) = x(0) - x(t) + R_0^{-1} \frac{x(t) - x(0)}{x(t)} \quad (36)$$

$$= x(0) - x(t) - R_0^{-1} \frac{x(0) - x(t)}{x(t)} \quad (37)$$

$$= x(0) - x(t) - R_0^{-1} \log \frac{x(0)}{x(t)} \quad (38)$$

$$= x(0) - x(t) + R_0^{-1} \log \frac{x(t)}{x(0)} \quad (39)$$

$$R_0^{-1} \log \frac{x(t)}{x(0)} = (y(t) - y(0)) + (x(t) - x(0)) \quad (40)$$

$$\log \frac{x(t)}{x(0)} = R_0((y(t) - y(0)) + (x(t) - x(0))) \quad (41)$$

$$\frac{x(t)}{x(0)} = \exp\left\{R_0((y(t) - y(0)) + (x(t) - x(0)))\right\} \quad (42)$$

$$x(t) = x(0) \exp\left\{R_0((y(t) - y(0)) + (x(t) - x(0)))\right\} \quad (43)$$

$$= x(0) \exp\left\{R_0((y(t) + x(t)) - (y(0) + x(0)))\right\} \quad (44)$$

となります。

式 (43) で極限 ( $t \rightarrow \infty$ ) を取ると、(23)(32) より、 $x(t)$  の極限  $x(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} x(t)$  は、

$$x(\infty) = x(0) \exp\left\{R_0((y(\infty) - y(0)) + (x(\infty) - x(0)))\right\} \quad (45)$$

$$= x(0) \exp\left\{R_0(x(\infty) - x(0))\right\} \quad (46)$$

$$= x(0) \exp\left\{-R_0(x(0) - x(\infty))\right\} \quad (47)$$

です。式 (47) は、(24) より、明らかに、

$$x(\infty) \neq 0 \quad (48)$$

であり、(15) より、

$$x(\infty) > 0 \quad (49)$$

です。

すなわち、感染者  $y$  がゼロになってシステムが停止する時点で、感受性人口  $x$  がゼロにならず、 $x$  は正の値に収束しますから、感染者  $y$  がゼロになる背景は、感染者  $y$  自身が減少することによるものと考えられます。

合わせて、重要なこととして、式 (47) は、感受性人口比率  $x(t)$  の収束値は、システムにとって所与の、a. 基本再生産数  $R_0$  と、b. 感受性人口比率の初期値  $x(0)$  によって決まることを示しています。

## 16.7 基本再生産数や初期の感受性人口比率が小さいと、感染しないままの人が割と残る。

今度は、やはり (23)(32) と共に、式 (38) から、 $x(t)$  の極限  $x(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} x(t)$  を考えると、

$$x(0) - x(\infty) - R_0^{-1} \log \frac{x(0)}{x(\infty)} = 0 \quad (50)$$

が得られます。

これを、

$$f(R_0, x(0), x(\infty)) = x(0) - x(\infty) - R_0^{-1} \log \frac{x(0)}{x(\infty)} \quad (51)$$

と見て、陰関数定理を用います。

すると、まず、基本再生産数  $R_0$  に関して、

$$\frac{dx(\infty)}{dR_0} = - \frac{\partial f(R_0, x(0), x(\infty)) / \partial R_0}{\partial f(R_0, x(0), x(\infty)) / \partial x(\infty)} \quad (52)$$

$$= - \frac{-\left(-\frac{1}{R_0^2}\right) \log \frac{x(0)}{x(\infty)}}{-1 - R_0^{-1} \frac{x(\infty)}{x(0)} \left(-\frac{x(0)}{(x(\infty))^2}\right)} \quad (53)$$

$$= - \frac{\frac{1}{R_0^2} \log \frac{x(0)}{x(\infty)}}{-1 + \frac{R_0^{-1}}{x(\infty)}} \quad (54)$$

であり、(30) および (11) より、

$$x(0) > R_0^{-1} \left( = \frac{\gamma}{\beta} \right) > x(\infty) \quad (55)$$

ですから、

$$\frac{dx(\infty)}{dR_0} < 0 \quad (56)$$

です。

したがって、基本再生産数  $R_0$  が大きい（小さい）ほど、感受性人口比率の収束値は低く（高く）なります。

基本再生産数が大きければ（＝感染力が強いと）、多くの人が感染を経験します。逆に、基本再生産数が小さいと、感染しないままの人  $x$  が、割と残ります。

次に、感受性人口比率の初期値  $x(0)$  に関して、

$$\frac{dx(\infty)}{dx(0)} = - \frac{\partial f(R_0, x(0), x(\infty)) / \partial x(0)}{\partial f(R_0, x(0), x(\infty)) / \partial x(\infty)} \quad (57)$$

$$= - \frac{1 - R_0^{-1} \frac{x(\infty)}{x(0)} \frac{1}{x(\infty)}}{-1 - R_0^{-1} \frac{x(\infty)}{x(0)} \left( -\frac{x(0)}{(x(\infty))^2} \right)} \quad (58)$$

$$= - \frac{1 - \frac{R_0^{-1}}{x(0)}}{-1 + \frac{R_0^{-1}}{x(\infty)}} \quad (59)$$

であり、(55) より、

$$\frac{dx(\infty)}{dx(0)} < 0 \quad (60)$$

です。

したがって、感受性人口比率の初期値が高い（低い）ほど、感受性人口比率の収束値は低く（高く）なります。

当初の感受性人口比率が高ければ（＝免疫を持っていない人が多ければ）、より多くの人が感染を経験します。逆に、当初に免疫を持っている人が多いと、感染しないままの人  $x$  が、割と残ります。これは、集団免疫の効果を示しています。

## 16.8 感染者数 $x$ の最大値

次に、基本再生産数  $R_0 = \beta/\gamma$  と、当初の感受性人口比率  $x(0)$  がいずれも高いほど、感染者数の最大値  $\bar{y}$  が大きくなることを確認します。

まず、式 (17) より、感染者  $y(t)$  は、式 (11) より、感染者数  $y$  が最大値  $\bar{y} > 0$  を持つ、感受性人口比率  $\bar{x}$  は、次のとおりです。

$$\frac{dy(t)}{dt} = (\beta\bar{x} - \gamma)\bar{y} = 0 \quad (17)$$

$$\beta\bar{x} - \gamma = 0 \quad (61)$$

$$\bar{x} = \frac{\gamma}{\beta} \quad (62)$$

$$= \frac{1}{R_0} \quad (63)$$

式 (38) および (23) から、

$$y(t) = x(0) - x(t) - \frac{1}{R_0} \log \frac{x(0)}{x(t)} \quad (38)$$

$$\bar{y} = x(0) - \bar{x} - \frac{1}{R_0} \log \frac{x(0)}{\bar{x}} \quad (64)$$

$$= x(0) - \frac{1}{R_0} - \frac{1}{R_0} \log R_0 x(0) \quad (65)$$

です。

まず、式 (65) を、基本再生産数  $R_0$  に関して、微分すると、

$$\frac{\partial \bar{y}}{\partial R_0} = -\left(-\frac{1}{(R_0)^2}\right) - \left(-\frac{1}{(R_0)^2}\right) \log R_0 x(0) - \frac{1}{R_0} \frac{x(0)}{R_0 x(0)} \quad (66)$$

$$= \frac{1}{(R_0)^2} - \left(-\frac{1}{(R_0)^2}\right) \log R_0 x(0) - \frac{1}{(R_0)^2} \quad (67)$$

$$= -\left(-\frac{1}{(R_0)^2}\right) \log R_0 x(0) > 0 \quad (68)$$

です（ $\rightarrow(30)$  を書き換えれば、 $R_0 x(0) > 1$  です）。

したがって、基本再生産数  $R_0$  が高い（低い）ほど、感染者数のピークは高く（低く）なります。言い換えれば、感染力が強いと、感染者のピーク水準は高くなります。

一方で、式 (65) を、当初の感受性人口比率  $x(0)$  に関して、微分すると、

$$\frac{\partial \bar{y}}{\partial x(0)} = 1 - \frac{1}{R_0} \frac{R_0}{R_0 x(0)} \quad (69)$$

$$= 1 - \frac{1}{R_0 x(0)} > 0 \quad (70)$$

です（ $\rightarrow(30)$  を書き換えれば、 $R_0 x(0) > 1$  です）。

したがって、当初の感受性人口比率  $x(0)$  が高い（低い）ほど、感染者数のピークは高く（低く）なります。言い換えれば、当初に免疫を持っている人が少ないと、感染者のピーク水準は高くなります。



## 参考文献

- [1] W. O. Kermack, and A. G. McKendrick, *A Contribution to the Mathematical Theory of Epidemics*, Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical and Physical Character, Volume 115, Issue 772 1927, 700-721
- [2] Herbert W. Hethcote, *The Mathematics of Infectious Diseases*, SIAM Review, 42(4), 599-653, 2000, Society for Industrial and Applied Mathematics
- [3] 稲葉寿、『微分方程式と感染症数理疫学』、数理科学、サイエンス社、2008年4月、NO.538
- [4] Tiberiu Harko, Francisco S. N. Lobo and M. K. Mak, *Exact analytical solutions of the Susceptible-Infected-Recovered (SIR) epidemic model and of the SIR model with equal death and birth rates*, Applied Mathematics and Computation, Volume 236, 1 June 2014, Pages 184-194
- [5] Natsuko Imai, Ilaria Dorigatti, Anne Cori, Steven Riley, Neil M. Ferguson, *Report 2: Estimating the potential total number of novel Coronavirus cases in Wuhan City, China*. [cited 24 Jan 2020].
- [6] Natsuko Imai, Anne Cori, Ilaria Dorigatti, Marc Baguelin, Christl A. Donnelly, Steven Riley, Neil M. Ferguson, *Transmissibility of 2019-nCoV.*, Imperial College London (25-01-2020), doi: <https://doi.org/10.25561/77148>
- [7] Ying Liu, Albert A. Gayle, Annelies Wilder-Smith, and Joacim Rocklöv, *The reproductive number of COVID-19 is higher compared to SARS coronavirus*, Journal of Travel Medicine, 1-4, 2020
- [8] Gypsyamber D' Souza and David Dowdy, *What is Herd Immunity and How Can We Achieve It With COVID-19?*, Johns Hopkins University, Bloomberg School of Public Health, April 10, 2020
- [9] Paul Fine, Ken Eames, David L. Heymann, *"Herd Immunity" : A Rough Guide*, Clinical Infectious Diseases, Volume 52, Issue 7, 1 April 2011, Pages 911-916, <https://doi.org/10.1093/cid/cir007>

- [10] Aaron Miller, Mac Josh Reandelar, Kimberly Fasciglione, Violeta Roumenova, Yan Li, Gonzalo H Otazu, *Correlation between universal BCG vaccination policy and reduced morbidity and mortality for COVID-19: an epidemiological study*, medRxiv, The Preprint Server for Health Sciences, 査読前
- [11] 一般社団法人 日本疫学会、『感染症疫学の用語解説』
- [12] 高田礼人、『ウイルスは悪者かーお侍先生のウイルス学講義』、株式会社亜紀書房、2018年
- [13] ジャレド・ダイヤモンド著、倉骨彰訳、『銃・病原菌・鉄』上、株式会社草思社、2000年
- [14] 理化学研究所、『自然免疫の記憶メカニズムを解明ー病原体感染によるエピゲノム変化が鍵ー』、2015年9月11日